**SHIFT-SCHEDULING per CLINICHE e CASE DI CURA**

**Formulazione di vincoli, variabili e funzione obiettivo**

**Michele Grieco**

**Inquadramento e scelte di progettazione**

**Obiettivo.** Il programma genera orari di lavoro ottimali per cliniche e case di cura, rispettando vincoli legali, contrattuali e organizzativi e tenendo conto delle esigenze di copertura dei reparti. I vincoli sono classificati in **HARD** (inderogabili, se non esiste una soluzione che li rispetta il problema viene dichiarato non risolvibile) e **SOFT** (derogabili con penalità in funzione obiettivo).

**Caratteristiche principali:**

* Si può definire l’orizzonte temporale dell’orario da elaborare. I diversi vincoli fanno riferimento a segmenti temporali diversi (giorni, settimana, mese).
* Possibilità di **lock pre-assegnazioni**. Si possono definire assegnazioni dipendente-turno da soddisfare necessariamente oppure da impedire.
* Viene garantita la **copertura** richiesta per ogni giorno–reparto–turno.
* Si prevedono **vincoli orari** (mensili/settimanali massimi, giorni consecutivi) e di **riposo** (11h tra turni, riposi settimanali). Vengono previsti sia vincoli soft che vincoli hard.
* Gestisce i **turni notturni** (idoneità, limiti settimanali/mensili/consecutivi) e i **pattern post-notte.**
* Considera **assenze individuali** (ferie/malattia/permessi) che vengono conteggiate come ore lavorate per quanto riguarda i vincoli contrattuali
* Supporta **multi-reparto**: Ogni dipendente è affiliato a un reparto; coperture e orari sono indicati per reparto. In caso di necessità e a parità di ruolo, si abilitano assegnazioni in reparti diversi dal proprio, se considerati idonei.
* Bilancia la distribuzione (fairness) di notti, weekend/festivi, **proporzionalmente all’FTE** (full-time equivalent) per adeguare i parametri ai lavoratori part-time.
* Ogni dipendente ha un saldo ore che indica le ore di lavoro in più o in meno che ha svolto dall’inizio dell’anno. Si cerca, se possibile, di ridurre il saldo.

**Scelte di progettazione**

* **DEFINIZIONE DEI TURNI**: I turni sono considerati **contenitori temporali indivisibili**, ne viene sempre preservata l’integrità.  
  Ogni dipendente in una giornata può trovarsi nei seguenti stati:
* **M**: turno del mattino
* **P**: turno pomeridiano
* **N**: turno notturno
* **SN**: smonto notte. Non è un vero e proprio turno, è un indicatore per segnalare che il giorno successivo a un turno notturno non va conteggiato come giornata di riposo. Si attiva solo se il giorno successivo all’inizio del turno notturno non vengono assegnati altri turni. (Quindi se si fanno due notti consecutive la sequenza sarà N-N e non N-SN)
* **R**: giornata di riposo
* **F**: ferie/malattia/permesso/assenza
* Esistono degli orari globali predefiniti per ciascun turno ma ogni reparto può, secondo le esigenze, modificarne l’orario. Possono anche essere creati nuovi turni, che possono essere abilitati in tutti i reparti o solo nei reparti che lo richiedono.
* ***compatibilità ruolo↔turno*** definita globalmente. Utile per abilitare/disabilitare un ruolo in particolare ai turni notturni.

Per singolo reparto, invece, se non si richiede la presenza di un turno specifico lo si può disabilitare.

Si può inoltre definire la possibilità o impossibilità di coprire un turno notturno anche a livello di singolo dipendente.

* **Copertura per reparto**: Si prevede che ogni reparto richieda per ciascun giorno e per ciascun turno una domanda di personale, che viene sviluppata sia per gruppi di ruoli che per singolo ruolo.  
  Esempio: si può richiedere che siano presenti almeno 7 dipendenti tra infermieri e oss, di cui almeno 2 infermieri e almeno 3 oss.
* **Overstaffing:** possibilità di impedire categoricamente l’overstaffing o di permetterlo fissando un tetto.
* **Bordi dell’orizzonte**: quando viene eleborato l’orario si “guarda indietro” alcuni giorni per applicare correttamente i vincoli che hanno bisogno di controlli sul periodo precedente.
* **Tecnologia di soluzione.** Il modello di ottimizzazione OR-TOOLS (CP-SAT) applica i vincoli HARD e minimizza le penalità SOFT

**Definizione dei Vincoli**

Possono essere definiti i seguenti gruppi principali di vincoli: vincoli di copertura della domanda, vincoli orari, vincoli sul riposo, vincoli sulle notti, vincoli sui pattern.

I parametri che fanno riferimmento ai vincoli sono definiti discrezionalmente e possono essere modificati dall’utente in base alle necessità.

**Copertura della domanda** di personale per giorno/reparto/turno: **vincolo HARD.**

La domanda viene sviluppata sia per gruppi di ruoli che per ruolo.

**Vincoli orari:**

* **Ore mensili teoriche secondo contratto -> vincolo SOFT**

Esiste un default per ruolo, con possibilità di override per singolo dipendente.  
Si prevede la possibilità di derogare alle ore previste da contratto se necessario, penalizzando opportunamente la deroga in funzione obiettivo.

* **Ore mensili massime inderogabili -> vincolo HARD**  
  Pur permettendo di assegnare più ore di quelle previste da contratto si prevede un tetto che non si può superare. Se non indicato, si è scelto di impostare di default il 25% in più delle ore contrattuali mensili.
* **Ore settimanali massime -> vincolo HARD**

Si prevede un massimo anche alle ore settimanali per non concentrare tutte le eventuali ore extra mensili in una sola settimana. Si è scelto di impostare al massimo il 40% in più di quelle teoriche. Può essere modificato in base alle esigenze.

**Vincoli notti**

* **Idoneità notte per ruolo/dipendente** (**HARD)** → (se non idoneo: nessuna N assegnabile).
* **Numero massimo di notti per settimana/mese** (**HARD):**

Si definisce per ogni ruolo se sono previsti turni notturni e, in caso positivo, il numero massimo di notti settimanali e mensili. Possibilità di override per singolo dipendente.

* **Numero massimo notti consecutive -> vincolo HARD**
* **Penalità per ogni notte consecutiva dopo la prima -> vincolo SOFT**

Vengono permesse notti consecutive (con penalità) ma viene comunque stabilito un massimo che non si può superare.

**Nota**: si consiglia una penalità per notti consecutive non eccessivamente elevata perché, come illustrato dopo, viene attivata una penalità che fa riferimento alla fairness sulla distribuzione delle notti all’interno di un singolo reparto. Questa dovrebbe già fare in modo, laddove possibile, di distribuire il numero di notti in modo omogeneo.

**Vincoli sui pattern:**

* Dopo una **sequenza di 2 o più notti** deve esserci una **sequenza SN (smonto notte) − Riposo** nei due giorni successivi -> **vincolo HARD**.
* **Dopo una singola notte viene suggerita una preferenza** per la sequenza **SN (smonto notte) − R** -> **vincolo SOFT**. (Nel caso in cui il dipendente ha ferie o permessi, non si penalizza nemmeno la sequenza **N-SN-F**)
* Dopo una **sequenza Notte - Pomeriggio**: **Riposo** obbligatorio il giorno successivo -> **vincolo HARD**.
* **Incompatibilità Notte→Mattina** -> **vincolo HARD**
* **Turni notturni incompatibili con assenze** il giorno successivo → **vincolo HARD**  
  Se un giorno D è prevista un’assenza per Ferie/Malattia/Permesso, si vieta l’assegnazione di un turno Notte che termini in D (niente N al giorno D−1).
* **NOTA**: la sequenza N-P è già penalizzata per mancato rispetto del riposo di 11 ore.

Se cade l’assunzione per cui il riposo tra i 2 turni è inferiore alle 11 ore (ad esempio perchè qualche reparto modifica i turni di default) ma si vuole comunque penalizzare la sequenza N-P, si può prevedere una penalità specifica.

**Vincoli riposo:**

* **Riposo di 11 ore** tra un turno e l’altro **-> VINCOLO SOFT,** valido per tutti i ruoli.
* **Numero massimo di deroghe** alle 11 ore di riposo in un mese **-> vincolo HARD**
* Numero massimo di **deroghe consecutive** alle 11 ore di riposo **-> vincolo HARD**

**Nota**: Anche per questi parametri c’è la possibilità di sovrascrivere il parametro globale e impostarlo per singolo dipendente.

* **Riposo un giorno a settimana -> VINCOLO SOFT** per tutti i ruoli
* **2 giorni R su 2 settimane -> VINCOLO HARD**   
  Si può derogare al giorno di riposo settimanale, ma in quel caso si deve recuperare il mancato riposo la settimana successiva.

**Nota**: per questi ultimi due vincoli per settimana si intende settimana a finestra mobile.

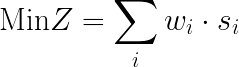
**Vincolo sulla variazione massima del saldo ore progressivo da fine a inizio mese: -> vincolo HARD**

Il programma cerca, in funzione obiettivo, di ridurre il saldo progressivo di ogni dipendente. Mettere un vincolo Hard serve per imporre implicitamente un minimo di ore: se un dipendente è in saldo positivo di molte ore, si cerca di fargliele recuperare gradualmente e non tutte in un mese. Senza questo vincolo, il solver — pur rispettando la domanda di copertura — tenderebbe ad assegnare **il minor numero possibile di ore** ai dipendenti in surplus. Probabilmente la domanda di copertura imporrebbe comunque un numero di ore accettabile per ogni dipendente, ma si è scelto di introdurre anche questo vincolo come guard-rail.

### **FUNZIONE OBIETTIVO E MODELLAZIONE MATEMATICA**

### **1. Struttura generale**

La funzione obiettivo del modello è una **somma ponderata di penalità** associate a violazioni o comportamenti indesiderati.  
L’obiettivo è **minimizzare** tale somma, in modo da trovare una pianificazione che rispetti il più possibile le regole e le preferenze organizzative.



dove:

* Si =  numero di occorrenze di mancato soddisfacimento di una clausola o, se usata una scala temporale, minuti / ore in cui non si rispetta un vincolo o preferenza.
* Wi = peso (penalità)

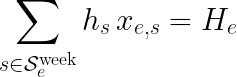
I vincoli hard restano sempre soddisfatti; quelli soft possono essere violati, ma ogni violazione incrementa il valore della funzione obiettivo proporzionalmente al suo peso.

### **2. Componenti principali della funzione obiettivo**

#### **a. Slack dei vincoli soft**

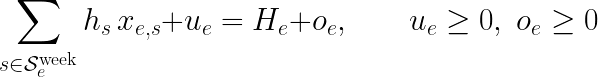
Per chiarire il significato delle **variabili di slack**, è utile mostrare come esse vengono introdotte per trasformare un vincolo rigido in un vincolo “morbido”.  
 Nel caso di un vincolo *hard*, l’uguaglianza o l’inequazione devono essere sempre rispettate; quando invece il vincolo viene reso *soft*, si introduce una variabile di slack che misura l’entità della violazione consentita. Tale variabile è poi penalizzata in funzione obiettivo, in modo che il solver tenda comunque a ridurla al minimo.

A titolo di esempio, consideriamo il vincolo relativo al **monte ore settimanale per dipendente.** Nel modello *hard*, il totale delle ore assegnate a ciascun dipendente e deve coincidere esattamente con il target settimanale.



Nella versione *soft*, invece, vengono introdotte due variabili di slack:

* ue rappresenta le ore mancanti (sotto-copertura),
* oe rappresenta le ore in eccesso (sovra-copertura).



Il vincolo diventa quindi flessibile: può essere violato, ma le violazioni vengono poi **penalizzate nella funzione obiettivo**, ad esempio con un termine di questo tipo:



che incoraggia il modello a rispettare il più possibile il monte ore previsto per ogni dipendente.  
In questo modo è possibile assegnare pesi diversi alle ore in eccesso e a quelle in difetto.  
Per ora nel programma è stato scelto di tenere i pesi uguali.

#### **b. Saldo ore progressive**

Per ciascun dipendente il modello gestisce un **saldo progressivo** di ore rispetto al monte ore contrattuale, positivo se ha lavorato più del dovuto, negativo altrimenti. In input viene considerato il saldo progressivo iniziale, accumulato dall’inizio dell’anno fino alla data di inizio dell’orizzonte di pianificazione.  
Durante la pianificazione mensile, il solver cerca di minimizzare gli scostamenti e favorire nel tempo il riequilibrio dei saldi individuali, nel rispetto dei vincoli di copertura, riposi e limiti orari.

### **1. Penalità mensile con coefficienti adattativi**

Per ogni dipendente si introducono due variabili di slack:

* undere≥0: ore in difetto nel mese
* overe≥0: ore in eccesso nel mese

#### **Bilancio mensile**



**Aggiornamento saldo progressivo**



#### **Variazione massima mensile (vincolo HARD)**



Questo vincolo limita i recuperi o peggioramenti eccessivi in un singolo mese, garantendo una variazione graduale.

#### **Zona di tolleranza (deadband)**

Per evitare penalità su scostamenti minimi si può introdurre una soglia di tolleranza, in modo che se la differenza tra ore dovute e ore effettivamente svolte risulta esserte inferiore a un certo livello non viene penalizzata.



dove d è la soglia di tolleranza espressa in ore.

#### **Coefficienti adattativi e normalizzazione**

I pesi delle penalità mensili dipendono dal **saldo iniziale** individuale e sono normalizzati per garantire un comportamento coerente tra i dipendenti.

* **Clamping degli outlier (10°–90° percentile)**

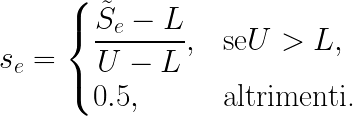
Si calcolano sui saldi iniziali i percentili Q10 e Q90 e si definiscono i limiti:



con Smax*⁡* cap massimo (es. 60h). I saldi sono quindi “clampati”.



**Normalizzazione lineare (mappa affine)**  
Si ottiene un valore normalizzato se ∈[0,1]:



Si tratta di una **mappa affine**, cioè una retta che riscala l’intervallo [L,U] in [0,1]:

saldi negativi → se≈0

saldi positivi → se≈1

**Coefficiente adattivo**



In questo modo:

* + chi ha **saldo positivo** (in surplus) → penalità **più alta** sull’OVER e **più bassa** sull’UNDER
  + chi ha **saldo negativo** (in deficit) → penalità **più bassa** sull’OVER e **più alta** sull’UNDER

**Normalizzazione per ruolo (opzionale)**  
 Se i ruoli hanno giornate tipo differenti, i coefficienti possono essere divisi per le ore medie giornaliere del ruolo.

#### **Termine mensile in funzione obiettivo**

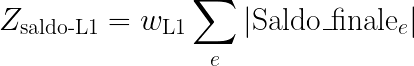
#### 

dove wover,wunder sono i pesi base per le ore in eccesso e in difetto.

Questo termine è **locale** e **mensile**: penalizza le deviazioni individuali in funzione del saldo iniziale, ma non impone un riequilibrio collettivo.

**2. Penalità globale sul saldo finale (termine L1)**

Per incoraggiare un **riequilibrio sistematico dei saldi progressivi**, anche quando tutti i dipendenti potrebbero lavorare esattamente le ore dovute, si introduce un ulteriore termine di penalità basato sulla **somma dei valori assoluti dei saldi** alla fine dell’orizzonte di pianificazione.



che equivale a minimizzare la **norma L1** del vettore dei saldi finali.  
Si sceglie la norma L1 e non la varianza o la norma L2 in quanto così si mantiene la funzione obiettivo **lineare** e facilmente gestibile dal solver CP-SAT.

#### **Significato operativo**

* Spinge tutti i saldiverso **zero**, anche in assenza di vincoli che impongano deviazioni.
* A differenza dei coefficienti adattativi (che agiscono solo quando si genera OVER/UNDER), il termine L1 aggiunge una **spinta globale e continua** verso l’equilibrio.

Il beneficio dell’equilibrio deve superare il costo delle ore extra create, cioè:



affinché uno scambio di ore da B (saldo positivo) ad A (saldo negativo) sia conveniente.

#### **Scelta del peso wL1**

* Se wL1 è **molto piccolo** (1–3% dei pesi mensili), il termine agisce come *tie-breaker*: riequilibra solo quando è indolore.
* Se wL1  è **più alto** (≈ metà del marginale medio per ora), spinge attivamente il sistema a ridurre i saldi anche quando tutti potrebbero lavorare le ore contrattuali.

#### **Funzione obiettivo completa (saldo progressivo)**

Quindi i termini relativi al saldo progressivo che compaiono in funzione obiettivo sono:



#### **Effetto complessivo**

* Il termine **mensile adattivo** guida le scelte per singolo dipendente, determinando chi deve fare ore in più o in meno.
* Il termine **L1 globale** introduce una preferenza *di sistema* verso la neutralità complessiva dei saldi.
* La combinazione dei due produce un comportamento equilibrato: il solver assegna le ore coerentemente con i saldi individuali e, nel tempo, tende a far convergere l’intero organico verso saldi prossimi allo zero.

**Nota:** Il presente termine della funzione obiettivo è espresso in **ore**, mentre la maggior parte degli altri termini è **adimensionale**, in quanto misura semplicemente il **numero di violazioni** o di occorrenze di una certa clausola.  
 Per rendere omogenei i contributi e garantire confrontabilità tra ruoli, le ore vengono **normalizzate** dividendo per la **durata media di un turno** del ruolo di appartenenza.  
 In questo modo il termine non rappresenta più “ore in più o in meno”, ma il **numero equivalente di turni medi in più o in meno**, consentendo di valutare in modo coerente l’impatto delle penalità tra ruoli con diversa struttura oraria.

#### ***c. Penalità per turni in un altro reparto***

Se un dipendente viene assegnato a un reparto diverso da quello di appartenenza (ma eleggibile), si applica una penalità proporzionale al numero di tali assegnazioni:



dove cross(e,s) = 1 se lo slot s appartiene a un reparto diverso da quello principale di e.

***d. Fairness su notti, festivi e weekend***

Si introducono penalità per **squilibri** tra dipendenti su:

* numero di turni notturni
* numero di weekend e festività lavorate

Per ciascun criterio si calcola una misura di dispersione e la si aggiunge come penalità. L’obiettivo è distribuire equamente i turni tipicamente meno desiderati.

Il criterio non impone un vincolo rigido, ma introduce un costo proporzionale alla misura della dispersione.

### **Fairness notti**

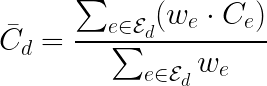
Per ogni reparto, si considerano i soli dipendenti abilitati a coprire turni notturni.  
Per ciascuno, si calcola il numero totale di notti cumulate fino alla fine dell’orizzonte di pianificazione:



dove:

* He  è il numero di notti già effettuate prima dell’orizzonte (storico cumulato);
* Ne è il numero di notti pianificate nel mese corrente.

Si determina quindi la **media pesata di reparto**, utilizzando come pesi i coefficienti we (uguale al coefficiente FTE, in modo da scalare opportunamente il computo per i lavoratori part-time)



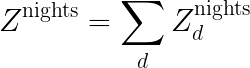
La deviazione assoluta di ciascun dipendente rispetto alla media è linearizzata tramite variabili ausiliarie ue≥0\_e ge ≥0:



Il termine di penalità per reparto è quindi:



e la penalità complessiva di fairness notti è:



Tale termine penalizza la **dispersione interna** delle notti totali (storico + pianificate) nel reparto, spingendo i totali individuali a convergere verso la media pesata.  
L’effetto è una redistribuzione progressiva dei turni notturni nel tempo, che tiene conto sia della storia pregressa sia del piano in costruzione.

**Nota:** nel POC è utilizzato un unico coefficiente globale αnights , uguale per tutti i reparti. La formulazione è tuttavia generalizzabile introducendo un coefficiente diverso per singolo reparto, utile in caso di pesi differenziati tra reparti con diverso profilo operativo.

### **Fairness weekend/festivi**

Per la distribuzione di turni su **sabato, domenica e festivi**, si adotta una formulazione analoga a quella descritta per le notti.  
In questo caso, per ogni dipendente si considerano i **turni WE/FEST** (e non i giorni) cumulativi, sommando i turni storici e quelli pianificati.  
La penalità misura la dispersione rispetto alla media pesata dei turni totali di reparto, secondo lo stesso schema di linearizzazione e ponderazione descritto sopra, con coefficiente globale per tutti i reparti.

Formalmente, il termine complessivo di fairness weekend/festivi introdotto in funzione obiettivo è:



dove le variabili uewe rappresentano le deviazioni assolute dei turni cumulativi rispetto alla media pesata del reparto.

### **Effetto complessivo**

I termini *Znights* e *Zwe*vengono sommati alla funzione obiettivo complessiva:



ottenendo una penalità che promuove l’equità nella distribuzione dei turni gravosi (notti e weekend/festivi) all’interno dei singoli reparti.

Il modello rimane interamente lineare e parametrizzabile tramite i coefficienti αnights e γwe, che consentono di regolare il peso relativo del criterio di fairness rispetto agli altri obiettivi.

#### **e. Stabilità del piano**

Penalizza variazioni rispetto alla pianificazione precedente.  
 Per ogni coppia (e, slot) si confronta l’assegnazione corrente con quella storica *xe,soldx\_{e,s}^{old}*xe,sold :

*Zstabilitaˋ=wstab⋅∑e,s∣xe,s−xe,sold∣Z\_{\text{stabilità}} = w\_{\text{stab}} \cdot \sum\_{e,s} |x\_{e,s} - x\_{e,s}^{old}|*Zstabilitaˋ =wstab ⋅e,s∑ ∣xe,s −xe,sold ∣

Serve a mantenere continuità e prevedibilità nei turni.

### **3. Funzione obiettivo complessiva**

Sommando tutti i contributi:

*Z=Zslack+Zfair+Zsaldo+Zreparto+Zstabilitaˋ\boxed{ Z = Z\_{\text{slack}} + Z\_{\text{fair}} + Z\_{\text{saldo}} + Z\_{\text{reparto}} + Z\_{\text{stabilità}} }*Z=Zslack +Zfair +Zsaldo +Zreparto +Zstabilitaˋ

Il modello minimizza *ZZ*Z.  
 I pesi *wiw\_i*wi sono parametri da calibrare per bilanciare i diversi obiettivi:

* **Alti** per vincoli organizzativi forti (es. equilibrio ore, copertura notti);
* **Bassi** per preferenze individuali o aspetti di comfort.

**Output**

**Possibilità d’uso**

Possibili integrazioni